

Irrazionale e trascendente: Decimale illimitato aperiodico

Un semplice esperimento che generalmente gli insegnanti delle scuole elementari propongono ai propri alunni per determinare la lunghezza di una circonferenza è il seguente:

- Si ritagli un cartone a forma circolare e si avvolga lungo il bordo un filo sottilissimo inestensibile in modo che i suoi estremi combacino. Così facendo si ottiene il modello della circonferenza.
- Distendendo tale modello su di una retta si ottiene un segmento che altro non è che la circonferenza rettificata. L'estensione di tale segmento dicesi lunghezza della circonferenza.

Dividendo questa lunghezza per la lunghezza del diametro della circonferenza di partenza si ottiene un numero molto prossimo a 3,14.....

Ripetendo la stessa esperienza con molti altri cerchi di raggi differenti, si può constatare che dividendo le lunghezze delle varie circonferenze per le lunghezze dei rispettivi diametri si otterranno sempre valori che differiscono pochissimo dal numero 3,14....

Queste verifiche sperimentali riguardanti i cerchi hanno indotto a concludere che il rapporto tra una qualsiasi circonferenza ed il suo diametro è costante.

È impossibile risalire a chi per la prima volta abbia osservato che al variare del raggio del cerchio la circonferenza varia proporzionalmente.

Questo rapporto si suole indicare con π simbolo che per la prima volta è stato usato dal matematico William Jones (1675-1749) nel 1706 in onore di Pitagora e successivamente reso di uso comune da Leonhard Euler (1707-1783).

Gli antichi Ebrei, Babilonesi e Cinesi, non andavano molto per il sottile e attribuivano nei loro calcoli a π il valore 3 come risulta da un passo della Bibbia (I RE 7:23): “Fece poi il mare di metallo fuso; da un orlo all’altro misurava dieci cubiti; tutt’intorno era circolare; la sua altezza era di cinque cubiti, mentre una cordicella di trenta cubiti ne misurava la circonferenza.”

In seguito però con il progredire della cultura e degli studi si andarono trovando valori sempre meno approssimati.

Nel famoso papiro di Henry Rhind (risalente all’anno c. 1650 a. C.) lo scriba Ahmes riporta forse il primo tentativo della storia di quadrare il cerchio. Egli scrisse: “Togli $\frac{1}{9}$ a un diametro e costruisci sulla parte rimanente un quadrato; questo quadrato ha la stessa area del cerchio. Con questo procedimento si dà a π il valore 3,16049....

Sembra però che gli antichi Egizi siano giunti ad un’approssimazione molto più decisa.

Infatti la piramide di Cheope consacra il numero π !

La grande piramide risale all’epoca dell’Antico Impero, e fu costruita sotto il regno di Cheope (c.2500 a. C.), quando la favolosa civiltà dei Faraoni era nel pieno fulgore della sua magnificenza.

Questa era destinata ad essere la casa dell’eternità del Re.

Ha la forma di un piramide a base quadrata in modo da offrire la massima garanzia di solidità e di indistruttibilità.

Narra lo scrittore greco Erodoto (c.485-425 a.C.) che occorsero ben dieci anni per preparare la strada necessaria per il trasporto del materiale destinato alla costruzione e la fabbrica del monumento durò venti anni.

In ogni caso non è tanto la grandiosa bellezza architettonica che costituisce veramente l'importanza di questi monumenti. È piuttosto la dottrina in essa racchiusa che fa impressione, rivelandoci quella che poteva essere la sapienza degli antichi. Infatti da qualche secolo in qua, molti studiosi hanno voluto scoprire nelle dimensioni, nella forma e nella disposizione topografica delle piramidi, la prova dell'alto grado di cultura posseduta dagli antichi Egizi.

Dagli studi effettuati è emerso che dividendo la lunghezza del perimetro della base per il doppio della lunghezza dell'altezza della piramide di Cheope si ottiene il numero 3,14....(essendo m. 230,37 la lunghezza del lato medio di base e m. 146,73 l'altezza).

Sembra che il principio ispiratore del progetto della grande piramide sia stato fare in modo che l'area di ogni faccia laterale fosse uguale all'area di un quadrato di lato pari all'altezza della piramide. Così facendo qualsiasi piramide a base quadrata approssima π eseguendo il rapporto tra il perimetro di base ed il doppio dell'altezza. Risulta

infatti un rapporto pari a $4 \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 3,1446055 \dots$

Comunque la piramide di Cheope presenta molti altri elementi geometrici, topografici ed astronomici che non possono essere considerati tutti fortuiti. Si ha infatti nella camera dei Re proporzioni dei lati che stanno nel rapporto 3, 4, 5, rappresentanti i lati di un triangolo rettangolo; i lati della base della piramide sono perfettamente orientati nella direzione dei quattro punti cardinali; se si moltiplica la sua altezza per un miliardo, si ottiene la distanza media terra-sole. Risulta inoltre il rapporto tra l'altezza relativa ad una faccia e la metà del lato di base della piramide essere pari al rapporto aureo $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618034 \dots$. Lo stesso valore risulta eseguendo il rapporto

tra il quadrato dell'altezza ed il quadrato di metà del lato di base.

Gli esempi ora riportati non sono i soli riscontrati dagli studiosi delle piramidi e sono decisamente troppi per essere tutti considerati coincidenze casuali.

Sulla quadratura del cerchio e quindi sulla ricerca del valore di π , si sono soffermate le più brillanti menti di ogni epoca. Plutarco ci tramanda i tentativi di Anassagora di Clazomene (c. 500 a. C.- 428 a.C.) che, mentre era in prigione per empietà, per aver affermato che il sole non era un Dio, ma soltanto una pietra incandescente, utilizzava il suo tempo in tentativi di quadrare il cerchio. *La regola da seguire era quella dell'uso della sola riga e compasso ed effettuare la quadratura in un numero finito di passi.*

Quasi contemporaneo di Anassagora fu Ippocrate di Chio (470 a. C.- 410 a. C.) che dedicò molti anni della sua vita alla quadratura del cerchio portandolo alla quadratura delle lunule (figure delimitate da archi di cerchio di raggio diverso) ed è questo il primo esempio tramandatoci della storia di quadrature di figure a contorno curvilineo.

Un notevole passo avanti per la comprensione del problema della quadratura del cerchio fu compiuto dal sofista Ippia di Elide (c. 443 a. C. – prima metà del secolo IV a.C.) alla fine del V secolo a. C. con la scoperta della sua curva trisettrice e quadratrice. Nel parlare della sua curva Ippia era certamente sicuro della sua utilità per trisecare un angolo, ma è impossibile oggi stabilire se egli era consapevole che la stessa curva era una quadratrice dal momento che la quadratura per mezzo della curva di Ippia venne specificatamente effettuata da Dinostrato (circa 350 a. C.) più tardi.

Successivamente ad Anassagora, due sofisti Antifonte (V sec. A. C.) e Brisone (450 a. C.) tentarono la quadratura del cerchio iscrivendolo e circoscrivendolo con poligoni con numero sempre crescente di lati.

Antifonte formulò l'idea che un cerchio può essere considerato come un poligono con un numero infinito di lati.

Euclide (c. 365 a. C.- c.300 a. C.) nei suoi scritti riporta solamente che in cerchi diversi i raggi stanno tra di loro come le rispettive circonferenze e le aree sono proporzionali ai quadrati dei raggi senza specificare le costanti.

È merito altissimo del siracusano Archimede (c. 287 a. C. – 212 a. C.) l'aver proposto un metodo scientifico per la valutazione di π . Egli partendo da poligoni regolari di 6, 12, 24, sino a 96 lati, iscritti e circoscritti ad una circonferenza poté assegnare a π un valore compreso tra $3 + 10/71$ e $3 + 10/70$. Questo risultato venne riportato dall'autore nell'opera "Sulla misura del cerchio".

Anche Archimede fu attratto dai famosi tre problemi greci della geometria: la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio. La famosa spirale di Archimede risolve due di questi tre problemi e precisamente la trisezione di un angolo e la quadratura del cerchio. Le soluzioni ottenute sono logicamente non con riga e compasso solamente.

Anche Apollonio da Perga (262 a. C.-190 a.C.) si dedicò alla quadratura del cerchio e scrisse pure un trattato che purtroppo è andato perduto.

Dovettero passare da allora parecchi secoli prima di giungere ad approssimazioni maggiori.

A partire dai primi secoli dell'Era cristiana fu molto intensa in Cina la ricerca di valori sempre più raffinati per π . Vennero trovati valori come $3,1547$, $\sqrt{10}$, $92/29$ e $142/45$.

Nel III secolo Liu Hui calcolò la cifra $3,14$ usando un poligono di 96 lati e con un poligono di 3072 lati calcolò $3,14159$.

Zu Chongzhi, matematico ed astronomo cinese del V secolo, calcolò π riuscendo a definirlo compreso tra $3,1415926$ e $3,1415927$ e lo approssimava con $335/113$ oppure con $22/7$.

Tsu Ch'ung-chih (430-501) trovava per π il valore $355/113$.

Tsu Ch'ung-chih, con l'aiuto del figlio Tsu Cheng-chih, affinò molto i suoi calcoli arrivando a dare $3,1415927$ come valore approssimato per eccesso e $3,1415926$ come valore approssimato per difetto. Nessuno avrebbe trovato un valore più preciso per oltre mille anni.

In India, verso il 530 d. C., il matematico Aryabatha trovò il perimetro di un cerchio approssimandolo con un poligono di 384 lati. Il valore da lui desunto per π era di $3,1414$.

Sempre in India nel VII secolo il matematico Brahmagupta calcolava i perimetri dei poligoni iscritti in un cerchio e approssimava π pari a $\sqrt{10}$, valore che si diffuse tra i matematici di tutto il mondo nel Medioevo anche grazie al fatto che era facile da ricordare e trasmettere.

Nel IX secolo nel mondo islamico visse ed operò un grande matematico Abu Abd-Allah ibn Musa al-Khwarizmi che nelle sue opere usò per π i valori $3+1/7$, $\sqrt{10}$, e $62.832/20.000$. Egli attribuiva il primo valore ai greci e gli altri due agli indiani.

Il matematico ed astronomo iraniano Ghyath ad-din Jamshid Kashami (1350-1439) calcolò 16 cifre decimali di π .

Anche Leonardo da Vinci (1452-1519) si è occupato della quadratura del cerchio e procedendo, per esaurimento, con poligoni interni ed esterni finì col definire il cerchio come un poligono di infiniti lati. Leonardo non diede contributi rilevanti in quanto il suo genio era attratto da un moltitudine di cose e sullo studio di π si soffermò solo poco tempo.

Il metodo di esaurimento per poligoni esterni ed interni durò ancora secoli ed ebbe la sua massima espressione con Ludolph van Ceulen (1540-1610).

Egli arrivò a calcolare 35 cifre decimali adoperando poligoni iscritti e circoscritti con 2^{62} lati. Fu così fiero del suo risultato che lo fece incidere sulla sua lapide.

Tali sforzi non hanno significato teorico se non quello di sperare in un arresto o una regolarità di π .

Bisognava procedere con altri metodi e si desiderava la soluzione esatta.

Francois Viète (1540-1603) fu il primo a dare un'espressione numerica teoricamente infinita, ma precisa di π .

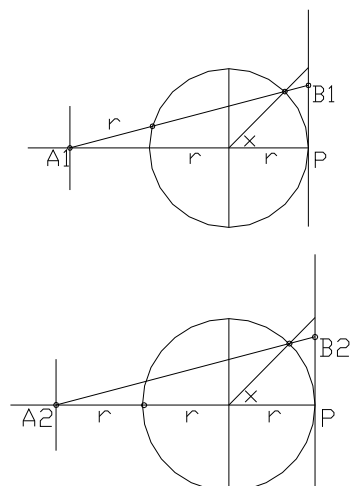
$$2/\pi = \cos 90^\circ/2 * \cos 90^\circ/4 * \cos 90^\circ/8 * \dots \dots \dots \quad (1593)$$

$$2/\pi = \sqrt{1/2} * \sqrt{1/2 + 1/2 * \sqrt{1/2}} * \sqrt{1/2 + 1/2 * \sqrt{1/2 + 1/2 * \sqrt{1/2}}} \dots$$

A questo valore Viète ci arrivò usando il metodo Archimedeo partendo da un quadrato e successivamente raddoppiando i lati.

Nel 1621 il fisico e matematico Willebrord Snell (1580-1626) trovò un metodo nuovo per approssimare π .

Nei grafici sotto riportati si può vedere come Snell approssima l'arco x stabilendo che esso è minore di PB_1 e maggiore di PB_2 .



Snell pur essendo sicuro delle sue teorie non riuscì a dimostrarle cosa che invece fece Christian Huygens (1629-1695) che con un esagono riuscì a stabilire i limiti 3,1415926533 e 3,1415926538

John Wallis (1616-1703) con un processo di integrazione ottenne nel 1665 la seguente espressione

$$\pi/2 = 2/1 * 2/3 * 4/3 * 4/5 * 6/5 * 6/7 * 8/7 * 8/9 * \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \right] \text{ che è un prodotto infinito di numeri razionali.}$$

Anche in questo caso dal numero dei fattori dipende il grado di approssimazione.

Wallis usava solo numeri razionali per il calcolo esecutivo contrariamente alla formula di Viète che richiedeva radici quadrate. Tuttavia la formula di Wallis richiede almeno 1000 termini per avere le prime due cifre decimali esatte di π .

James Gregory (1638-1675) mediante calcoli con arcotangenti apriva le porte a nuovi metodi di calcolo molto più efficienti del metodo Archimedeo.

Tre anni dopo la soluzione di Gregory, Gottfried Wilhem von Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727) trovano numerose serie per π . La più famosa è quella di Leibniz ottenuta nel 1674

$$\text{Arctg } x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots \text{ che per } x=1 \text{ fornisce:}$$

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

si definiva quindi π come il quadruplo della somma a segni alterni dei reciproci dei numeri dispari. Questa serie necessita di 764 termini affinché si abbiano le prime due cifre decimali di π .

William Brouncker (1620 circa-1684), primo presidente della Royal Society di Londra, trovò un modo per convertire il prodotto infinito di Wallis trasformando π in frazione continua :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{16}{7 + \frac{25}{9 + \frac{36}{11 + \frac{49}{13 + \dots}}}}}}$$

Eulero, tramite sviluppi in serie , nel 1748 trovò le somme dei reciproci di potenze pari da n=2 a n=26

$$\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots$$

$$\pi^4/90 = 1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \dots$$

$$\pi^6/945 = 1/1^6 + 1/2^6 + 1/3^6 + 1/4^6 + \dots$$

.

.

.

$$2^{24} * 76977927 * \pi^{26} / (1*2*3* \dots *27) = 1/1^{26} + 1/2^{26} + 1/3^{26} + \dots$$

Le serie dei reciproci di potenza dispari a tutt'oggi non si sa se sono multipli razionali di potenze dispari di π .

Eulero trovò inoltre :

$$\pi^2/12 = 1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + \dots$$

$$\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots$$

$$\pi^3/32 = 1/1^3 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + \dots$$

Sempre Eulero trovò due espressioni di frazioni continue per π .

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{2}{3 + \frac{1.3}{4 + \frac{3.5}{4 + \frac{5.7}{4 + \frac{7.9}{4 + \dots}}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{2}{7 + \frac{1.3}{8 + \frac{3.5}{8 + \frac{5.7}{8 + \frac{7.9}{8 + \dots}}}}}$$

Sempre dovuta ad Eulero è la formula:

$e^{i\pi} + 1 = 0$. Questa è da molti definita come l'equazione più bella di tutta la matematica e lega il numero di nepero, pi greco e l'unità immaginaria con i due più importanti numeri interi, 0 e 1.

Newton dallo sviluppo in serie dell'arcoseno ottiene per $x=1$ la seguente serie:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2*3} + \frac{1*3}{2*4*5} + \frac{1*3*5}{2*4*6*7} + \frac{1*3*5*7}{2*4*6*8*9} + \dots$$

Sempre di Newton è la serie:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3*2^3} \right) + \frac{1*3}{2*4} \left(\frac{1}{5*2^5} \right) + \frac{1*3*5}{2*4*6} \left(\frac{1}{7*2^7} \right) + \dots$$

La serie di Newton sono lentamente convergenti e si prestano male al calcolo approssimato di π .

Abraham Sharp (1651-1742) sviluppando l'arcotangente di $\sqrt{\frac{1}{3}}$, ossia

la tangente di 30° , trova la seguente serie:

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} * \left[1 - \left(\frac{1}{3*3} \right) + \left(\frac{1}{3^2*5} \right) - \left(\frac{1}{3^3*7} \right) + \dots \right]$$

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)}$$

Svariate serie sono state trovate e sono rappresentate dalle formule:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \quad \text{Eulero, 1738 (angoli in radianti)}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} \quad \text{Hutton, 1776}$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \quad \text{Hutton, 1776}$$

Di Wetherfield, 1996, sono le seguenti formule:

$$\frac{\pi}{2} = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{6} = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Serie per così dire più veloci furono trovate da Eulero e J. Machin (1680-1751) sfruttando particolari identità :

$$\frac{\pi}{4} = 5\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg} \frac{3}{79} \quad \text{Eulero, 1755}$$

$$\frac{\pi}{4} = 5\operatorname{arctg} \frac{29}{278} + 7\operatorname{arctg} \frac{3}{79}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99} \quad \text{Eulero 1764}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \quad \text{J. Machin, 1706}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{7} \quad \text{Hermann, 1706}$$

Dato che la serie dell'arcotangente per un dato valore converge tanto più rapidamente quanto più piccolo è il valore stesso, la formula di Machin è molto efficiente per i calcoli.

In pratica dall'inizio del XVIII secolo ai primi anni settanta del XX secolo tutti i calcoli di π si sono basati su varianti della formula di Machin.

Si hanno le seguenti formule:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \quad \text{L. K. Schulz von Strassnitzky, 1884}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{70} + \operatorname{arctg}\frac{1}{99} \quad \text{William Rutherford, 1841}$$

$$\frac{\pi}{4} = 5\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{53} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{4443}$$

$$\frac{\pi}{4} = 8\operatorname{arctg}\frac{1}{10} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{515} \quad \text{Klingenstierna, 1730}$$

$$\frac{\pi}{4} = 12\operatorname{arctg}\frac{1}{18} + 8\operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 5\operatorname{arctg}\frac{1}{239} \quad \text{C. F. Gauss, 1863}$$

$$\frac{\pi}{4} = 22\operatorname{arctg}\frac{1}{38} + 17\operatorname{arctg}\frac{7}{601} + 10\operatorname{arctg}\frac{7}{8149} \quad \text{Sebah}$$

F. C. W. Stormer nel 1896 trova

$$\frac{\pi}{4} = 6\operatorname{arctg}\frac{1}{8} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{57} + \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{4} = 44\operatorname{arctg}\frac{1}{57} + 7\operatorname{arctg}\frac{1}{239} - 12\operatorname{arctg}\frac{1}{682} + 24\operatorname{arctg}\frac{1}{12943}$$

$$\frac{\pi}{4} = 88\operatorname{arctg}\frac{1}{172} + 51\operatorname{arctg}\frac{1}{239} + 32\operatorname{arctg}\frac{1}{682} + 44\operatorname{arctg}\frac{1}{5357} + 68\operatorname{arctg}\frac{1}{12943}$$

D.H. Lehmer nel 1938 trova

$$\pi = 88\operatorname{arctg}\frac{1}{28} + 8\operatorname{arctg}\frac{1}{443} - 20\operatorname{arctg}\frac{1}{1393} - 40\operatorname{arctg}\frac{1}{11018}$$

Nel 1973 J. Guilloud e M. Bouyer arrivano a calcolare un milione di cifre di π basandosi sulla seguente identità:

$$\pi = 48\operatorname{arctg}\frac{1}{18} + 32\operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 20\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

Kikuo Takano nel 1982 trova

$$\frac{\pi}{4} = 12\operatorname{arctg}\frac{1}{49} + 32\operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 5\operatorname{arctg}\frac{1}{239} + 12\operatorname{arctg}\frac{1}{110443}$$

Abraham De Moivre (1667-1754) e P.S. de Laplace (1749-1827) mostrano che :

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (quadratura della curva Gaussiana) e con essa si ha l'ingresso trionfale di π nella teoria delle probabilità.

Johann Heirich Lambert (1728-1777) nel 1761 dimostra che π è un numero irrazionale.

Questa dimostrazione non eliminava la questione della quadratura del cerchio in quanto sono costruibili espressioni irrazionali di secondo grado con riga e compasso.

La questione fu definita nel 1882 da Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852-1939) dimostrando che π oltre ad essere irrazionale era anche trascendente ed era quindi impossibile quadrare il cerchio con solo riga e compasso in un numero finito di passi.

Anche di fronte all'ipossibilità di quadrare il cerchio i cacciatori di cifre non si sono fermati stabilendo di anno in anno sempre dei nuovi record.

La storia di π ci permette anche di parlare di uno dei più importanti matematici del XX secolo: Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920).

Ramanujan subì fortemente il fascino di π ed aprì porte nuove per calcolarlo adoperando equazioni modulari. Queste sono equazioni iterative: permettono cioè di reintrodurre nella formula i risultati del calcolo precedente per avere una approssimazione a π ancora migliore. Un'equazione modulare è una relazione algebrica tra una funzione $f(x)$, espressa in termini della variabile x e la stessa funzione espressa in termini di una potenza intera di x , per esempio $f(x^2)$, $f(x^3)$

L'ordine dell'equazione modulare è dato dalla potenza intera.

Per questo tipo di funzioni valgono particolari proprietà di simmetria e particolari condizioni portano a cosiddetti valori singolari che coincidono con π fino ad un numero sorprendente di posti decimali.

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^3 (42n + 5)}{n!^6 2^{(12n+4)}}$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{72} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n)!(23 + 260n)}{(n!)^4 4^{4n} 18^{2n}}$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3528} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n)!(1123 + 21460n)}{(n!)^4 4^{4n} 882^{2n}}$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 * 396^{4n}} \quad \text{Ramanujan (1914)}$$

con $n! = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 1$ e $0! = 1$.

Sempre ricercando soluzioni singolari di funzioni modulari Jonathan M. Borwein e Peter B. Borwein (contemporanei) hanno trovato nel 1987 la seguente serie:

$$\frac{1}{\pi} = 12 * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(n)!^3 (3n)! [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^{(3n+3/2)} * [212175710912\sqrt{61} + 1657145277365 + n(13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750)]}$$

(Il primo termine per n=0 porta ad un numero che concorda con π per 24 cifre.

I fratelli Chudnovsky Gregory e David (contemporanei) hanno trovato:

$$\frac{1}{\pi} = 12 * \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n * \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} * \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{3n+3/2}}$$

A tutt'oggi sono ancora aperte le ricerche per approssimare π con valori singolari di funzioni modulari.

Nel 1995 tre studiosi, David H. Bailey, Peter Borwein e Simon Plouffe trovarono particolari serie denominate serie BBP:

$$\pi = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \left(\frac{1}{16^K} \right)$$

$$\pi = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{2}{4K+1} + \frac{2}{4K+2} + \frac{1}{4K+3} \right) \frac{(-1)^K}{4^K}$$

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{8k+1} + \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{8k+3} - \frac{1}{16k+10} - \frac{1}{16k+12} - \frac{1}{32k+28} \right) \frac{1}{16^k}$$

$$\pi = \frac{1}{64} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{32}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} + \frac{256}{10k+1} - \frac{64}{10k+3} - \frac{4}{10k+5} - \frac{4}{10k+7} + \frac{1}{10k+9} \right) \frac{(-1)^k}{1024^k}$$

$$\pi \sqrt{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{6k+1} + \frac{1}{6k+3} + \frac{1}{6k+5} \right) \frac{(-1)^k}{8^k}$$

$$\pi^2 = \frac{9}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{16}{(6k+1)^2} - \frac{24}{(6k+2)^2} - \frac{8}{(6k+3)^2} - \frac{6}{(6k+4)^2} + \frac{1}{(6k+5)^2} \right) \frac{1}{64^k}$$

F. Bellard tramite una trasformazione della BBP formula trova:

$$\pi = \frac{1}{2^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} * \left(-\frac{2^5}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{2^8}{10n+1} - \frac{2^6}{10n+3} - \frac{2^2}{10n+5} - \frac{2^2}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right)$$

Altre serie riportate in letteratura sono:

$$\frac{\pi - 3}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{36k^2 - 1}$$

$$\pi - 3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)(2k+1)}$$

$$\frac{\pi^3 + 8\pi - 56}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)(2k+1)^3}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 16 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)^2(4k+3)^2(4k+5)^2} \quad \text{Lucas}$$

$$10 - \pi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3(k+1)^3}$$

$$\frac{\pi^2 - 8}{16} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} \quad \text{Eulero}$$

$$\frac{32 - 3\pi^2}{64} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^3} \quad \text{Eulero}$$

$$\frac{\pi^4 + 30\pi^2 - 384}{768} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^4} \quad \text{Eulero}$$

$$\frac{\pi^2}{18} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!^2}{(2k)!k^2} \quad \text{Eulero}$$

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k+1)}} \tan\left(\frac{\pi}{2^{(k+1)}}\right) \quad \text{Eulero}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1*2}{3*5} + \frac{1*2*3}{3*5*7} + \dots \quad \text{Eulero}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1*2}{1*3} + \frac{1*2*3}{1*3*5} + \frac{1*2*3*4}{1*3*5*7} + \dots \quad \text{Eulero}$$

$$\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!^2}{(2k+1)!}$$

$$\frac{2\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{4}{3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!^2}{(2k)!k}$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{9} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!^2}{(2k)!k}$$

$$\frac{17\pi^4}{3240} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!^2}{(2k)!k^4} \quad \text{Comtet}$$

$$\frac{\pi}{3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+1)16^k k!^2}$$

$$\pi + 3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!^2 k 2^k}{(2k)!}$$

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(25k-3)k!(2k)!}{2^{(k-1)}(3k)!} \quad \text{Gosper (1974)}$$

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k+1} \right) \quad \text{Knopp}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \arctg\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right) \quad \text{Knopp}$$

$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - 1}{4^k} \zeta(k+1) \quad \text{Flajolet-Vardi}$$

(ζ = funzione di Riemann) con $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$

$$\frac{\pi}{5\sqrt{\phi} + 2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{\phi^{2k+1} (2k+1)!} \quad \text{con } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ rapporto aureo}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \dots$$

$$\frac{61\pi^7}{184320} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^7} = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \dots$$

·
·
·

$$\frac{|E_{2p}\pi^{(2p+1)}|}{4^{(p+1)}(2p)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{(2p+1)}} \quad E = \text{numeri di Eulero}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2*3*4} - \frac{1}{4*5*6} + \frac{1}{6*7*8} - \dots \quad \text{Nilakantha Somayaji}$$

Valori di π calcolati come valori limiti:

$$2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ radici}}$$

che approssima per difetto 2π per n finito. C.S. Siracusa

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{2^n} = 2^n \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ radici}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ radici}}}$$

che approssima per eccesso π per n finito. C.S. Siracusa

Formule ricavate per esaurimento con poligoni regolari iscritti:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{30^\circ}{2^n} (1 - \cos \frac{30^\circ}{2^n})$$

$$\frac{\pi}{5} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{8} \right) \sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{36^\circ}{2^n} \left(1 - \cos \frac{36^\circ}{2^n} \right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{45^\circ}{2^n} \left(1 - \cos \frac{45^\circ}{2^n} \right)$$

Breve cronologia di π :

- 20⁰ secolo a.C.: i Babilonei usavano 25/8 per π ;

- 20⁰ secolo a.C.: gli Egizi, nel papiro di Rhind, usano $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1605$;
- 12⁰ secolo a.C.: i Cinesi usano il valore pari a 3 per π ;
- 550 a.C.: nell'Antico Testamento gli Ebrei usano il valore pari a 3 per π ;
- 434 a.C.: Anassagora tenta la quadratura del cerchio solo con riga e compasso;
- 430 a.C.: Antifonte e Brisone esprimono il principio di esaustione definendo il cerchio come un poligono di infiniti lati;
- 335 a.C.: Dinostrato usa la quadratrice di Ippia per quadrare il cerchio;
- 3⁰ secolo a.C.: Archimede utilizza poligoni iscritti e circoscritti fino a 96 lati ottenendo $3+10/71 < \pi < 3+10/10$;
- 20 a.C.: Vitruvio usa per π il valore 25/8;
- 2⁰ secolo: Tolomeo usa per π il valore 377/120 = 3.14166...
- 3⁰ secolo: Chang Hong usa $\pi = \sqrt{10}$, Wang Fau usa $\pi = 142/45$ e Liu Hui usa $\pi = 157/50$;
- 5⁰ secolo (450 circa): Tsu Ch'ung-chih trova per π il valore approssimato pari a 355/113 = 3.1415929....
- 5⁰ secolo: Zu Chongzhi trova che $3.1415926 < \pi < 3.1415927$;
- 6⁰ secolo (530 circa): in India, Aryabhata usa per π il valore approssimato pari a 62832/20000;
- 7⁰ secolo (650 circa): in India, Brahmagupta usa per π il valore approssimato pari a $\sqrt{10}$;
- 9⁰ secolo: Al Khawarizmi sa per π il valore approssimato pari a 3.1416;
- 1220: Fibonacci usa il valore 3.141818;
- 1430: Al Kashi calcolaleprime 14 cifre di π ;
- 1573: Valenthus Otho calcola le prime 6 cifre di π ;
- 1593: Francois Vieta calcola 9 cifre di π e Dutch Adrien van Roomen 15 cifre;
- 1596: Ludolph van Ceulen calcola 32 cifre di π ;
- 1610: Ludolph van Ceulen calcola 35 cifre di π ;
- 1621: Willebrord Snell perfeziona il metodo di Archimede;
- 1654: Huygens dimostra la validità del metodo di Snell;
- 1655: John Wallis trova un prodotto infinito razionale per π ;
- 1655: William Brouncker trasforma il prodotto infinito di Wallis in prodotto continuo;
- 1663: in Giappone Muramatsu Shigekico trova per π sette cifre decimali;
- 1665: Isaac Newton calcola π sino alla sedicesima cifra decimale;
- 1671: James Gregory scopre le serie delle arcotangenti;
- 1674: Gottfried Wilhelm Leibniz scopre la serie delle arcotangenti per π ;

- 1699: Abraham Sharp calcola 72 cifre decimali di π ;
- 1700: In Giappone Seki Kowain calcola 10 cifre decimali;
- 1703: In Giappone -----Kamatain calcola 25 cifre decimali;
- 1706: John Mahin calcola 100 cifre decimali;
- 1713: la Corte Cinese pubblica il Su-li Ching-yun e presenta 19 cifre decimali per π ;
- 1719: Thomas Fantet de Lagny calcola 127 cifre di cui 112 sono corrette;
- 1723: In Giappone Takebe Kenko calcola 41 cifre;
- 1734: adottato da Eulero, l'uso del simbolo π si diffonde;
- 1739: ----- Matsunaga calcola 50 cifre;
- 1748: Eulero pubblica molte serie per π e π^2 ;
- 1761: Johann Heinrich Lambert dimostra che π è un numero irrazionale;
- 1775: Eulero trova una serie di arcotangenti rapidamente convergenti e ipotizza che π possa essere trascendente;
- 1794: Jurij von Vega calcola 140 cifre decimali di cui 136 sono corrette;
- 1794: Adrien Marie Legendre dimostra che π^2 e quindi π è irrazionale e considera la possibilità che π sia trascendente;
- 1841: William Rutherford calcola 208 cifre di cui 152 sono corrette;
- 1844: L. K. Shulz von Strassnitzkj calcola sino a 200 cifre;
- 1847: Thomas Clauen calcola sino a 248 cifre;
- 1853: William Rutherford calcola sino a 440 cifre;
- 1855: ----- Richter calcola sino a 500 cifre;
- 1874: William Shanks calcola 707 cifre di cui 527 sono corrette;
- 1874: in Cina Tseng Chi-hung calcola 100 cifre;
- 1882: Ferdinand von Lindemann dimostra che π è trascendente;
- 1947: D.F. Ferguson calcola 808 cifre decimali in un lavoro durato quasi un anno con l'ausilio di una delle prime calcolatrici da tavolo;
- 1948: George Rietwiesner. Jonh von Newmann e N. C. Metropolis calcolano 2037 cifre in 70 ore utilizzando un computer ENIAC;
- 1954: la United States Navy calcola 3089 cifre in 13 minuti utilizzando un computer NORC IBM;
- 1958: il Paris Data Processing Center calcola 10.000 cifre in un'ora e quaranta minuti con un computer IBM 704;
- 1961: John Wrenck e Daniel Shanks calcolano 100.265 cifre in 8 ore, 43 minuti e 12 secondi utilizzando un computer IBM 7090;
- 1966: il Paris Data Processing Center calcola 250.000 cifre utilizzando un IBM 7030;
- 1967: il Paris Data Processing Center calcola 500.000 cifre utilizzando un computer CDC 6600;

- 1973: Jean Guilloud e M. Bouyer calcolano 1.000.000 di cifre utilizzando un computer CDC 7600;
- 1976: Eugene Salamin e Richard Brent sviluppano indipendentemente un algoritmo rapidamente convergente per il calcolo di π ;
- 1982: Yoshiaki Tamura e Yasumasa Kanada calcolano 8.388.608 cifre in meno di 30 ore utilizzando l'algoritmo di Salamin-Brent con un computer Hitac M-280H.
- 1988: Yasumasa Kanada calcola 201.326.000 cifre in 6 ore utilizzando un computer Hitachi S'820;
- 1989: i fratelli David e Gregory Chudnovsky calcolano 480.000.000 di cifre con un computer assemblato da loro;
- 1989: i fratelli David e Gregory Chudnovsky calcolano 1.000.000.000 di cifre;
- 1995: Yasumasa Kanada calcola 6.000.000.000 di cifre;
- 1996: i fratelli David e Gregory Chudnovsky calcolano più di 8.000.000.000 di cifre;
- 1997: Yoshiaki Tamura e Yasumasa Kanada calcolano 51.539.607.552 cifre in 29 ore utilizzando un computer Hitachi SR2201;
- 2003: Yasumasa Kanada calcola 1.241.100.000.000 cifre in più di 600 ore utilizzando 64 computer Hitachi SR8000/MPP;

In seguito vengono riportate tre curve quadratiche ideate dall'autore.

La curva del ragno

Si definiscono “ quadratiche “ le curve che permettono la quadratura del cerchio o la rettificazione della circonferenza.

La curva quadratiche che viene qui rappresentata è una curva che effettua la rettificazione della circonferenza e viene denominata “ la curva del ragno “.

Considerata una circonferenza, mantenuto fisso un punto su di essa ed individuato il punto diametralmente opposto si effettui su di esso il taglio della circonferenza e si proceda alla riduzione con continuità della sua curvatura fino a rettificarla e, successivamente, a richiuderla ripristinando il contatto in un punto che risulterà simmetrico, rispetto al punto fisso inizialmente determinato, del punto dove si era effettuato il taglio.

Sia data circonferenza di raggio R riferita ad un piano cartesiano come in figura 1

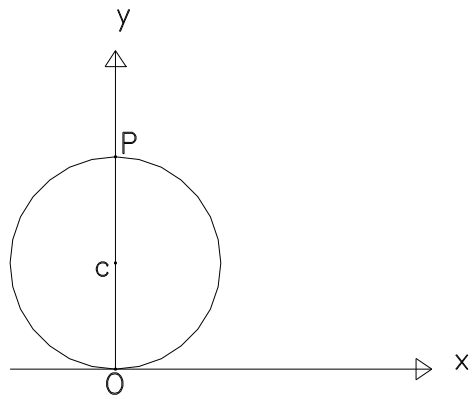


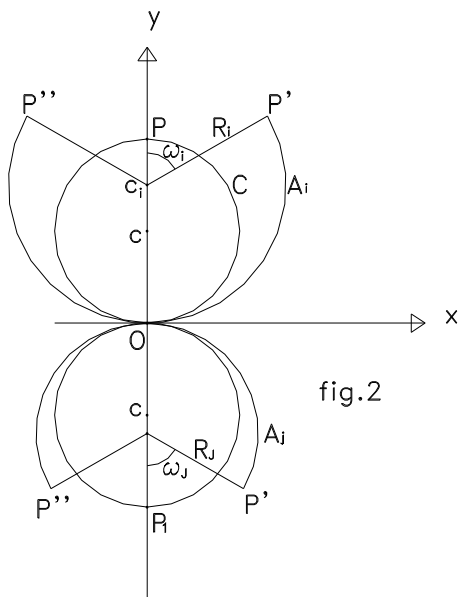
fig.1

Si supponga fisso il punto O coincidente con l'origine del sistema di riferimento.

Sia P il punto, simmetrico di O rispetto al centro C della circonferenza, dove viene effettuato il taglio della circonferenza.

Riducendo con continuità la curvatura della circonferenza data si hanno archi di circonferenze il cui sviluppo è pari alla circonferenza di partenza.

Dalla figura 2 si ha:



sviluppo della circonferenza assegnata $C = 2 \pi R$;

- per un generico arco A_i di circonferenza deve essere:

$$A_i = (2 \pi - 2 \omega_i) R_i \text{ con } A_i = C;$$

Quindi si ha:

$$2 (\pi - \omega_i) R_i = 2 \pi R \quad \text{ossia} \quad R_i = R \left(\frac{\pi}{\pi - \omega_i} \right).$$

La curva descritta dal punto P (P^I e P^{II}), durante la rettifica e successiva richiusura della circonferenza, sino a ricongiungersi in P_1 è la curva quadratrice “ La curva del ragno “.

Le coordinate del punto P^I in funzione del parametro ω sono (vedi figura 3):

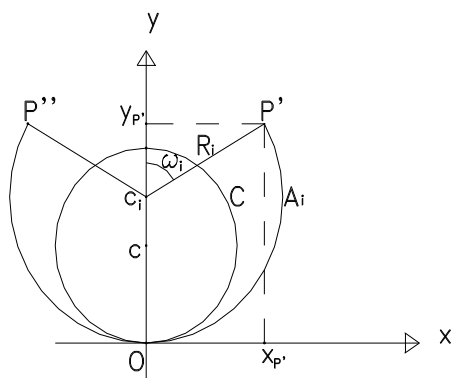


fig.3

$$(I) \begin{cases} x = R_{(\omega)} \sin \omega = \left(\frac{\pi}{\pi - \omega} \right) R \sin \omega \\ y = R_{(\omega)} + R_{(\omega)} \cos \omega = \left(\frac{\pi}{\pi - \omega} \right) R (1 + \cos \omega) \end{cases}$$

$$\text{con } 0 \leq \omega \leq \pi$$

Per un generico arco di circonferenza (figura 4) si ha che l'angolo ω_i è doppio dell'angolo $C_i \hat{O} P_i$ in quanto rispettivamente sono angolo al centro e angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.

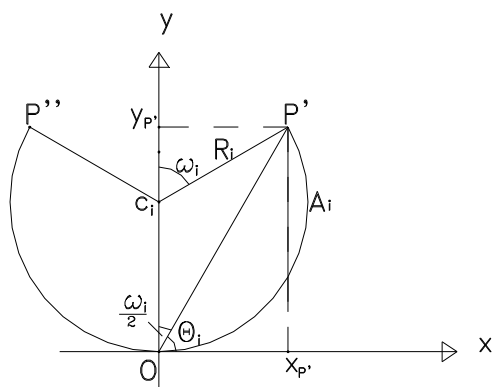


fig.4

$$\text{Sarà quindi } \theta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_i}{2}$$

Se si sceglie come parametro θ , essendo $\omega = \pi - 2\theta$, le (I)

$$\text{diventano: (II) } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2\theta} R \sin(\pi - 2\theta) \\ y = \frac{\pi}{2\theta} R [1 + \cos(\pi - 2\theta)] \end{cases}$$

$$\text{con } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Dalle (II) si ottengono le coordinate polari di

$$P^I \begin{cases} \theta = \text{variabile} \\ \rho_{(\theta)} = \sqrt{x_{(\theta)}^2 + y_{(\theta)}^2} \end{cases}$$

sviluppando si ha: $\rho_{(\theta)} = \frac{\pi}{2\theta} R \sqrt{2[1 + \cos(\pi - 2\theta)]}$.

Il raggio vettore ρ in funzione di ω è dato da : $\rho_{(\omega)} = \left(\frac{\pi}{\pi - \omega} \right) R \sqrt{2(1 + \cos \omega)}$.

Dalle (II) si evince che assegnato angolo θ (ω) il raggio vettore $\rho_{(\theta)}$ ($\rho_{(\omega)}$) dipende solo dal valore di R.

Al variare di R da 0 ad ∞ si ottengono tutte le curve del ragno che sono tra loro omotetiche con centro dell'omotetia il punto O che è anche centro di simmetria.

Se R = 1 la rettificata della semicirconferenza fornisce il valore di π (pi greco).

Infatti $\lim_{\omega \rightarrow \pi} x_{(\omega)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} x_{(\theta)} = \pi$, $\lim_{\omega \rightarrow \pi} \rho_{(\omega)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \rho_{(\theta)} = \pi$.

Si vuole ora evidenziare una particolare caratteristica delle curve del ragno che consentono di approssimarsi a π , per successive bisezioni dell'angolo $\pi - \omega$ (θ) a partire

da $\pi - \omega = \frac{\pi}{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$), usando solo riga e compasso.

Si consideri la circonferenza di centro c e raggio R (vedi figura 5).

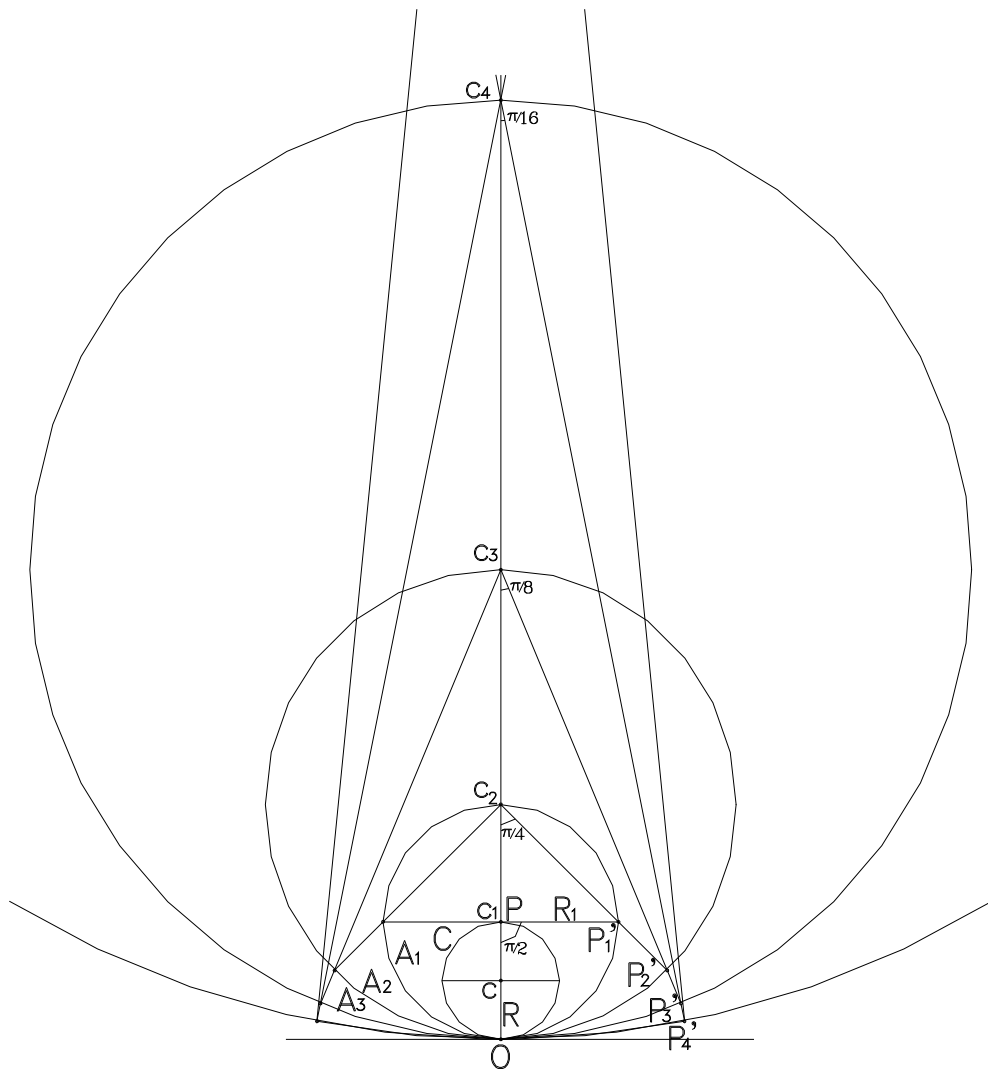


fig.5

Si effettui il taglio in P e si riduca la curvatura sino ad avere una semicirconferenza di raggio R_1 .

Dovendo essere $C = A_1$ si ha:

$2 \pi R = \pi R_1$ ossia $R_1 = 2R$ e quindi il centro c_1 viene a coincidere con il punto P e si ha

$$\pi - \omega_1 = \frac{\pi}{2} \left(\theta_1 = \frac{\pi}{4} \right).$$

I punti P_1^I e P_1^{II} sono punti della curva del ragno.

$$\text{Bisecando l'angolo } \pi - \omega_1 = \frac{\pi}{2} \left(\theta_1 = \frac{\pi}{4} \right) \text{ si avr\`a } \pi - \omega_2 = \frac{\pi}{4} \left(\theta_2 = \frac{\pi}{8} \right).$$

La condizione $C = A_2$ da $2\pi R = \frac{\pi}{2} R_2$ ossia $R_2 = 4R$.

Essendo $\overline{Oc_1} = \overline{c_1c_2} = \overline{c_1P_1^I}$ deriva che P_2^I , punto estremo dell'arco A_2 , si trova sull'allineamento $\overline{c_2P_1^I}$.

Lo stesso vale per il punto P_2^{II} che si trova sull'allineamento $\overline{c_2P_1^{II}}$.

L'angolo in c_1 e l'angolo in c_2 sono rispettivamente angolo al centro e angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.

Quindi con centro c_2 e apertura di compasso pari a $\overline{c_2O} = 4R$ si tracci la circonferenza.

Condotte da c_2 le congiungenti $\overline{c_2P_1^I}$ e $\overline{c_2P_1^{II}}$ i loro prolungamenti intersecheranno la circonferenza ora descritta nei punti P_2^I e P_2^{II} che sono punti della curva del ragno ottenuti dalla bisezione.

Iterando il procedimento si ha che ad ogni bisezione raddoppia il raggio dell'arco e si dimezza quindi la curvatura.

L'ascissa dei punti P_n^I ottenuta per successive bisezioni tende al valore πR .

Se $R=1$ la successione tende al valore π (pi greco).

Il procedimento non ha fine in quanto le successive bisezioni portano alla polverizzazione dell'angolo $\pi - \omega$ (θ) ma mai al suo annullamento.

È qui il caso di riportare il più importante frammento anassagoreo

(Anassagora, attorno al 450 a.C.) sull'infinita divisibilità giunto fino a noi; esso afferma: “ **rispetto al piccolo non vi è ultimo grado di piccolezza, ma v'è sempre un più piccolo, essendo impossibile che, ciò che è, cessi di essere per divisione** ”.

Il valore esatto di π si ha per un valore nullo di curvatura il che implica raggio di curvatura ∞ e $\omega = \pi$ ($\theta = 0$) che conduce all'indeterminazione geometrica.

Da ciò si deduce, come procedimento limite, che le curve del ragno hanno in $x = \pm \pi R$ tangente verticale.

Si riportano in seguito i risultati numerici ottenuti per bisezioni a partire da $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ considerando $R = 1$.

Nell'iterazioni si usa ricorsivamente la formula di bisezione $\sin \frac{\omega_i}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega_i}{2}}$.

Iterando la $x_{(\omega)}$ si ha:

$$x_{(\theta)} = \left(\frac{\pi}{\pi - \theta} \right) \sin \theta$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 2\sqrt{2} = 2,828427125.....$$

$$x_2 = 2^2 \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 3,061467459.....$$

$$x_3 = 2^3 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 3,121445153.....$$

$$x_4 = 2^4 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 3,136548491.....$$

$$x_5 = 2^5 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} = 3,1403312.....$$

$$x_6 = 2^6 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}} =$$

.....

$$x_n = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}} = \dots \text{ formula di iterazione}$$

n-1 radici

Siccome il seno di un angolo ottenuto per successive bisezioni tende a 0 si ha, dalla formula di iterazione, come valore limite della

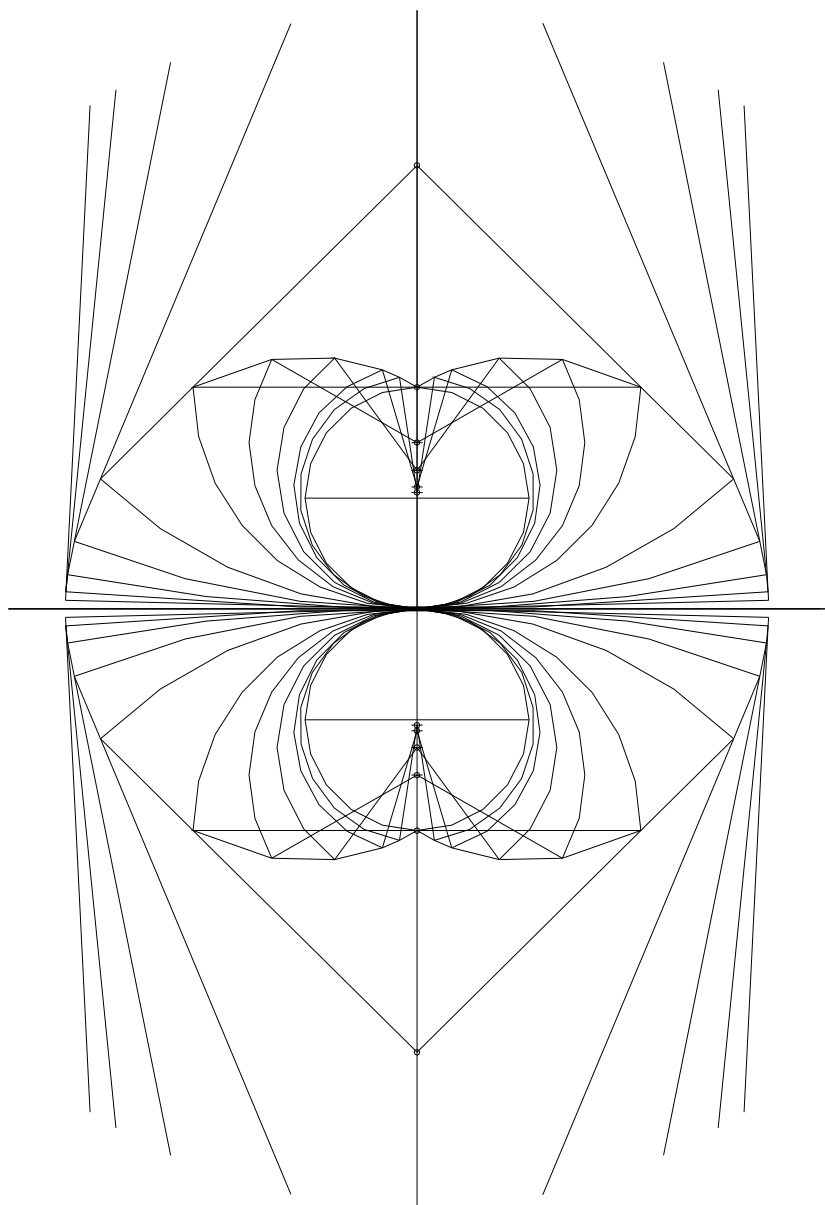
$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}} \Rightarrow 2.$$

Risultando inoltre il valore limite della formula di iterazione pari a π si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = 1$$

la quale esplicitata fornisce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}}^{n \text{ radici}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}}^{n-1 \text{ radici}}} \Rightarrow \frac{1}{2}.$$



costruzione della curva del ragno

La curva quadratrice

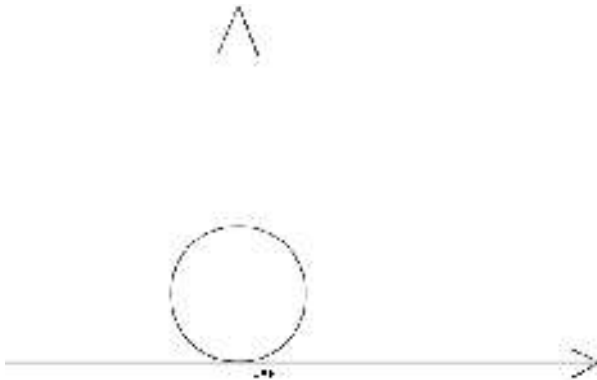
“ Elicidea “

La curva quadratrice che in seguito viene presentata è stata denominata “Elicidea” perché il suo sviluppo ricorda una chiocciola.

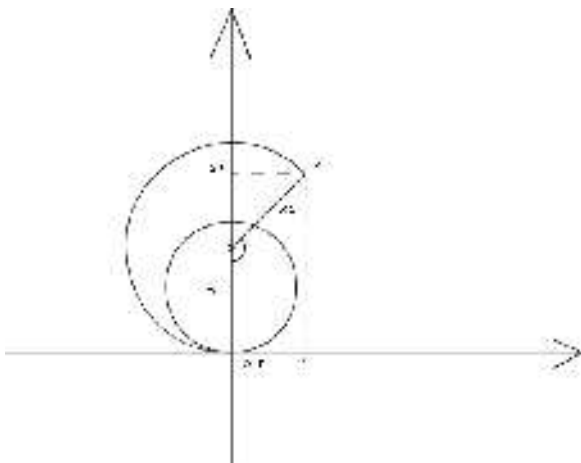
Essa effettua la rettifica della circonferenza e consente una misura approssimata (quanto si vuole) di π .

Con questo procedimento si effettua lo “srotolamento” della circonferenza data, dopo averla aperta tagliandola in un punto, ottenendo archi tutti della stessa lunghezza, ma appartenenti a circonferenze di curvatura sempre minore. I centri delle circonferenze stanno tutti su una retta assegnata. Tali archi hanno in comune il primo estremo mentre il secondo estremo descrive la curva che vogliamo definire.

Si consideri una circonferenza ed un sistema di assi cartesiani come in fig.1.



Si effettui in O il taglio della circonferenza e si proceda, con continuità, alla riduzione della sua curvatura (fig.2) sino a rettificarla.



Si avrà (fig.1) $C = 2\pi R$ e (fig.2) $C_i = (2\pi - \alpha_i)R_i$. (i = variabile continua).

Dovendo essere $C=C_i$ si ha: $2\pi R = (2\pi-\alpha_i)R_i$ e quindi

$R_i = [2\pi/(2\pi-\alpha_i)] R$. Per α_i tendente a 2π R_i tende a ∞ .

Le coordinate del punto P della i-esima circonferenza rettificata sono:

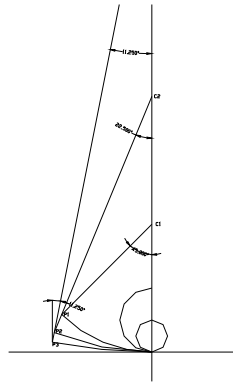
$$x_i = R_i \sin(\pi-\alpha_i) = R_i \sin \alpha_i = (2\pi/2\pi-\alpha_i) R \sin \alpha_i$$

$$y_i = R_i + R_i \cos(\pi-\alpha_i) = R_i - R_i \cos \alpha_i = (2\pi/2\pi-\alpha_i) R (1-\cos \alpha_i).$$

Se α_i tende a 2π si ottiene lo sviluppo della circonferenza.

Se $R=1$ lo sviluppo fornirà il valore 2π .

Si vuole ora evidenziare una particolare proprietà della curva quadratrice Elicidea che consente di approssimarsi a 2π , per successive bisezioni dell'angolo $2\pi-\alpha_i$ a partire da $2\pi-\alpha_i=\pi/4$, usando solo riga e compasso (fig.3).



Bisecando l'angolo sopradetto si ha il raddoppiare del raggio, ed il punto estremo dell'arco, che corrisponde a $2\pi-\alpha_i = \pi/8$, sarà sull'allineamento C2-P1.

Questo procedimento non ha fine in quanto le infinite possibili bisezioni dell'angolo portano alla sua polverizzazione e mai al suo annullamento.

Si deduce da ciò che la curva Elicidea ha in $x = -2\pi$ tangente verticale in quanto procedendo alla rettificata il raggio tende all'infinito.

Il valore esatto della rettificata (ossia 2π se $R=1$) si ha per un valore nullo della curvatura il che implica raggio di curvatura ∞ e $2\pi-\alpha_i = 0$ il che conduce all'indeterminazione geometrica.

Nelle iterazioni per dicotomia dell'angolo si usa ricorsivamente la formula di bisezione

$$\sin \frac{\alpha_i}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha_i}{2}}.$$

Iterando la $x_{(\alpha_i)}$ si ottiene la

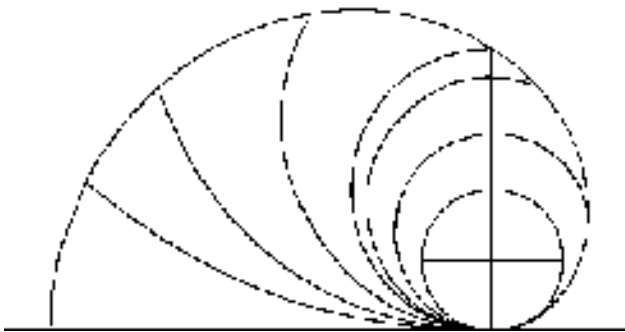
$$2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ radici}}$$

che approssima per difetto 2π per n finito.

Considerando la tangente alle circonferenze rettificate si ottiene

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{2^n} = 2^n \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ radici}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ radici}}}$$

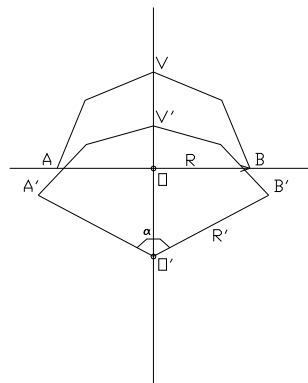
che approssima per eccesso π per n finito.



Curva Elicidea

La curva quadratrice a ventre

Si consideri una semicirconferenza AVB di raggio R (vedi fig.1).



Lasciando fissi i punti A e B si riduca, con continuità la curvatura della circonferenza di partenza sino a far tendere V ad O. Così facendo si ottiene la rettifica della semicirconferenza.

Si ha:

$$C/2 = \pi R = \alpha R' \quad \text{quindi} \quad R' = \pi R/\alpha ;$$

Si ha inoltre

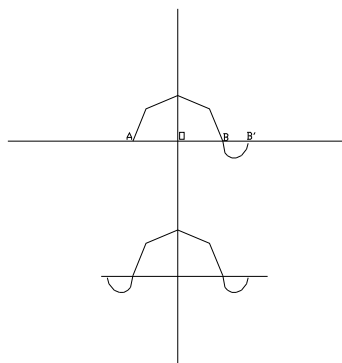
$$OO' = \sqrt{(R')^2 - R^2} \quad \text{e quindi per il punto B' si ottiene:}$$

$$1) \quad x = R' \sin \alpha/2 = (\pi R/\alpha) \sin \alpha/2$$

$$2) \quad y = OO' - R' \cos \alpha/2$$

$$y = - \left[R \sqrt{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1} - \frac{\pi R}{\alpha} \cos \frac{\alpha}{2} \right]$$

A partire da $\alpha=90^\circ$, per $R=1$, iterando la 1) per successive bisezioni si può approssimare il valore di $\pi/2$.



Bibliografia

M. Kline, Storia del pensiero matematico,
Vol. I e Vol. II, Einadi editore 1999.

C. B. Boyer, Storia della matematica,
Mondadori editore 2001.

L. Cresci, Le curve celebri,
Muzzio editore 1998.

M. Livio, La sezione aurea,
Rizzoli editore 2006.

D. Blatner, Le gioie di π ,
Garzanti editore 1999.

M. Gardner, Lo straordinario numero π ,
Le Scienze n°46, giugno 1972.

J. M. Borwein e P. B. Borwein, Ramanujan e π ,
Le Scienze n°236, aprile 1988.

G. Fera, Sul metodo di Snell per l'approssimazione di π ,
Rivista Archimede n°2, 2000.

M. Barlotti, Chiarimenti sulla curva quadratrice Elicidea,
Rivista Archimede n°1, 2006.

C. S. Siracusa, La curva del ragno,
pubblicazione a cura dell'Assessorato Cultura e
Pubblica Istruzione del Comune di Siculiana, 2002.

Wikipedia, Pi greco,
Internet (enciclopedia libera)