La quadratura del cerchio
Di Calogero Siracusa

Un semplice esperimento che generalmente gli insegnanti delle scuole elementari propongono ai propri alunni per determinare la lunghezza di una circonferenza è il seguente:

- Si ritagli un cartone a forma circolare e si avvolga lungo il bordo un filo sottilissimo inestensibile in modo che i suoi estremi combacino. Così facendo si ottiene il modello della circonferenza.
- Distendendo tale modello su di una retta si ottiene un segmento che altro non è che la circonferenza rettificata. L'estensione di tale segmento dicesi lunghezza della circonferenza.

Dividendo questa lunghezza per la lunghezza del diametro della circonferenza di partenza si ottiene un numero molto prossimo a 3,14….. .

Ripetendo la stessa esperienza con molti altri cerchi di raggi differenti, si può constatare che dividendo le lunghezze delle varie circonferenze per le lunghezze dei rispettivi diametri si otterranno sempre valori che differiscono pochissimo dal numero 3,14…. .

Queste verifiche sperimentali riguardanti i cerchi hanno indotto a concludere che il rapporto tra una qualsiasi circonferenza ed il suo diametro è costante.

È impossibile risalire a chi per la prima volta abbia osservato che al variare del raggio del cerchio la circonferenza varia proporzionalmente.

Questo rapporto si suole indicare con π simbolo che per la prima volta è stato usato dal matematico William Jones (1675-1749) nel 1706 in onore di Pitagora e successivamente reso di uso comune da Leonhard Euler (1707-1783).

Gli antichi Ebrei, Babilonesi e Cinesi, non andavano molto per il sottile e attribuivano nei loro calcoli a π il valore 3 come risulta da un passo della Bibbia (1 RE 7:23): “Fece poi il mare di metallo fuso; da un orlo all’altro misurava dieci cubiti; tutt’intorno era circolare; la sua altezza era di cinque cubiti, mentre una cordicella di trenta cubiti ne misurava la circonferenza.”

In seguito però con il progredire della cultura e degli studi si andarono trovando valori sempre meno approssimati.

Nel famoso papiro di Henry Rhind (risalente all’anno c. 1650 a. C.) lo scriba Ahmes riporta forse il primo tentativo della storia di quadrare il cerchio. Egli scrisse: “Togli 1/9 a un diametro e costruisci sulla parte rimanente un quadrato; questo quadrato ha la stessa area del cerchio. Con questo procedimento si da a π il valore 3,16049…. .

Sembra però che gli antichi Egizi siano giunti ad un’approssimazione molto più decisa.

Infatti la piramide di Cheope consacra il numero π!

La grande piramide risale all’epoca dell’Antico Impero, e fu costruita sotto il regno di Cheope (tra il 3100 e 2500 a. C.), quando la favolosa civiltà dei Faraoni era nel pieno fulgore della sua magnificenza.
Questa era destinata ad essere la casa dell’eternità del Re. Ha la forma di un piramide a base quadrata in modo da offrire la massima garanzia di solidità e di indistruttibilità.
Narra Erodoto che occorsero ben dieci anni per preparare la strada necessaria per il trasporto del materiale destinato alla costruzione e la fabbrica del monumento durò venti anni.
In ogni caso non è tanto la grandiosa bellezza architetonica che costituisce veramente l’ importanza di questi monumenti. È piuttosto la dottrina in essa racchiusa che fa impressione, rivelandoci quella che poteva essere la sapienza degli antichi. Infatti da qualche secolo in qua, molti studiosi hanno voluto scoprire nelle dimensioni, nella forma e nella disposizione topografica delle piramidi, la prova dell’alto grado di cultura posseduta dagli antichi Egizi.
Dagli studi effettuati è emerso che dividendo la lunghezza del perimetro della base per il doppio della lunghezza dell’altezza della piramide di Cheope si ottiene il numero 3,14159…. (essendo m. 931,22 la lunghezza del perimetro della base e m. 296,416 la lunghezza del doppio dell’altezza).
Narra sempre Erodoto che la grande piramide fu costruita in modo che l’area di ogni faccia laterale fosse uguale all’area di un quadrato di lato pari all’altezza della piramide. Così facendo qualsiasi piramide a base quadrata approssima π.
Comunque la piramide di Cheope presenta molti altri elementi geometrici, topografici ed astronomici che non possono essere considerati tutti fortuiti. Si ha infatti nella camera dei Re proporzioni dei lati che stanno nel rapporto 3, 4, 5 , rappresentanti i lati di un triangolo rettangolo; i lati della base della piramide sono perfettamente orientati nella direzione dei quattro punti cardinali; se i moltiplica la sua altezza per un miliardo, si ottiene la distanza media terra-sole. Gli esempi ora riportati non sono i soli riscontrati dagli studiosi delle piramidi e sono decisamente troppi per essere tutti considerati coincidenze casuali.
Sulla quadratura del cerchio si sono soffermate le più brillanti menti di ogni epoca. Plutarco ci tramanda i tentativi di Anassagora di Clazomene (c. 500 a. C.- 428 a.C.) che, mentre era in prigione per empietà , per aver affermato che il sole non era un Dio, ma soltanto una pietra incandescente, utilizzava il suo tempo in tentativi di quadrare il cerchio. La regola da seguire era quella dell’uso della sola riga e compasso ed effettuare la quadratura in un numero finito di passi.
Quasi contemporaneo di Anassagore fu Ippocrate di Chio (470 a C.- 410 a. C.) che dedicò molti anni della sua vita alla quadratura del cerchio portandolo alla quadratura delle lunule (figure delimitate da archi di cerchio di raggio diverso) ed è

questo il primo esempio tramandatoci della storia di quadrature di figure a contorno curvilineo.
Un notevole passo avanti per la comprensione del problema della quadratura del cerchio fu compiuto dal sofista Ippia di Elide(c. 443 a. C. – prima metà del secolo IV a.C.) alla fine del V secolo a. C. con la scoperta della sua curva trisettrice e quadratrice. Nel parlare della sua curva Ippia era certamente sicuro della sua utilità per trisecare un angolo, ma è imposibile oggi stabilire se egli era consapevole che la stessa curva era una quadratrice dal momento che la quadratura per mezzo della curva di Ippia venne specificatamente effettuata da Dinostrato (circa 350 a. C.) più tardi.
Successivamente ad Anassagora , due sofisti Antifone (V sec. A. C.) e Brisone (450 a. C.) tentarono la quadratura del cerchio iscrivendolo e circoscrivendolo con poligoni con numero sempre crescente di lati.
Antifone formulò l'idea che un cerchio può essere considerato come un poligono con un numero infinito di lati.
Euclide (c. 365 a.C.- c.300 a.C.) nei suoi scritti riporta solamente che in cerchi diversi i raggi stanno tra di loro come le rispettive circonferenze e le aree sono proporzionali ai quadrati dei raggi senza specificare le costanti.
È merito altissimo del Siracusano Archimede (c. 287 a.C. – 212 a.C.) l'aver proposto un metodo scientifico per la valutazione di π. Egli partendo da poligoni regolari di 6, 12, 24, sino a 96 lati, iscritti e circoscritti ad una circonferenza ha potuto assegnare a π un valore compreso tra 3 + 10/71 e 3 + 10/70. Questo risultato venne riportato dall'autore nell'opera "Sulla misura del cerchio".
Anche Archimede fu attratto dai famosi tre problemi della geometria: la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio. La famosa spirale di Archimede risolve due di questi tre problemi e precisamente la trisezione di un angolo e la quadratura del cerchio. Le soluzioni ottenute sono logicamente non con riga e compasso solamente.
Anche Apollonio da Perga (262 a.C.-190 a.C.) si dedicò alla quadratura del cerchio e scrisse pure un trattato che purtroppo è andato perduto.
Dovettero passare da allora parecchi secoli prima di giungere ad approssimazioni maggiori.
A partire dai primi secoli dell'Era cristiana fu molto intensa in Cina la ricerca di valori sempre più raffinati per π. Vennero trovati valori come 3,1547 , $\sqrt{10}$, 92/29 e 142/45.
Nel III secolo Liu Hui calcolò la cifra 3,14 usando un poligono di 96 lati e con un poligono di 3072 lati calcolò 3,14159.
Tsu Ch'ung-chih (430-501) trovava per π il valore 355/113.
Tsu Ch'ung-chih, con l'aiuto del figlio Tsu Cheng-chih, affinò molto i suoi calcoli arrivando a dare 3,1415927 come valore approssimato per eccesso e 3,1415926 come valore approssimato per difetto. Nessuno avrebbe trovato un valore più preciso per oltre mille anni.

In India, verso il 530 d. C. , il matematico Aryabatha trovò il perimetro di un cerchio approssimandolo con un poligono di 384 lati. Il valore da lui desunto per π era di 3,1414.

Sempre in India nel VII secolo il matematico Brahmagupta calcolava i primetri dei poligoni iscritti in un cerchio e approssimava π pari a $\sqrt{10}$, valore che si diffuse tra i matematici di tutto il mondo nel Medioevo anche grazie al fatto che era facile da ricordare e trasmettere.

Nel IX secolo nel mondo islamico visse ed operò un grande matematico Abu Abd-Allah ibn Musa al-Khwarizmi che nelle sue opere usò per π i valori 3+1/7 , $\sqrt{10}$, e 62.832/20.000. Egli attribuiva il primo valore ai greci e gli altri due agli indiani.

Il metodo di esaustione per poligoni esterni ed interni durò ancora secoli ed ebbe la sua massima espressione con Ludolph van Ceulen (1540-1610).

Egli arrivò a calcolare 35 cifre decimali adoperando poligoni iscritti e circoscritti con 2^{62} lati.

Tali sforzi non hanno significato teorico se non quello di sperare in un arresto o una regolarità di π.

Bisognava procedere con altri metodi e si desiderava la soluzione esatta.

Francois Viète (1540-1603) fu il primo a dare un'espressione numerica teoricamente infinita, ma precisa di π.

$$2/\pi = \cos 90°/2 * \cos 90°/4 * \cos 90°/8 * \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2/\pi = \sqrt{1/2} * \sqrt{1/2 + 1/2 * \sqrt{1/2}} * \sqrt{1/2 + 1/2 * \sqrt{1/2 + 1/2 * \sqrt{1/2}}}$$

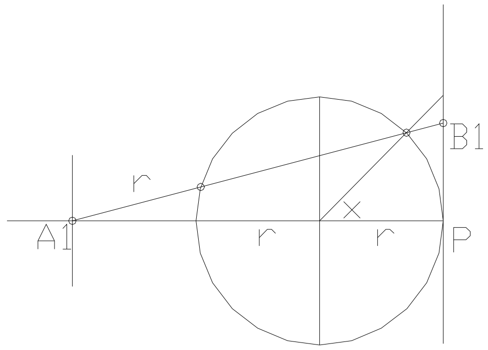
..

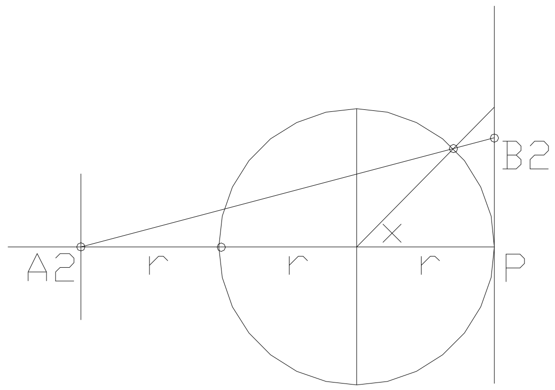
A questo valore Viète ci arrivò usando il metodo Archimedeo partendo da un quadrato e successivamente raddoppiando i lati.

Nel 1621 il fisico e matemtico Willebrord Snell (1580-1626) trovò un metodo nuovo per approssimare π.

Nei grafici sotto riportati si può vedere come Snell approssima l'arco x

stabilendo che esso è minore di PB_1 e maggiore di PB_2.





Snell pur essendo sicuro delle sue teorie non riuscì a dimostrarle cosa che invece fece Christiaan Huygens (1629-1695) che con un esagono riuscì a stabilire i limiti 3,1415926533 e 3,1415926538
John Wallis (1616-1703) con un processo di integrazione ottenne:

$\pi/2 = 2/1 * 2/3 * 4/3 * 4/5 * 6/5 * 6/7 * 8/7 * 8/9 * \ldots$

Anche in questo caso dal numero dei fattori dipende il grado di approssimazione.
Wallis usava solo numeri razionali per il calcolo esecutivo contrariamente alla formula di Vière che richiedeva radici quadrate. Tuttavia la formula di Wallis richiede almeno 1000 termini per avere le prime due cifre decimali esatte di π.
James Gregory (1638-1675) mediante calcoli con arcotangenti apriva le porte a nuovi metodi di calcolo molto più efficienti del metodo Archimedeo.
Tre anni dopo la soluzione di Gregory, Gottfried Wilhem von Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727) trovano numerose serie per π. La più famosa è quella di Leibniz ottenuta nel 1674

Arctg $x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots\ldots\ldots$ che per x=1 fornisce:

$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \ldots$

si definiva quindi π come il quadruplo della somma a segni alterni dei reciproci dei numeri dispari. Questa serie necessita di 764 termini affinchè si abbiano le prime due cifre decimali di π.

William Brouncker (1620 circa-1684), primo presidente della Royal Society di Londra, trovò un modo che è rimasto ignoto per porre π sotto forma di frazione continua

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ldots}}}}$$

Eulero, tramite sviluppi in serie , nel 1748 trovò le somme dei reciproci di potenze pari da n=2 a n=26.

$\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots$

$\pi^4/90 = 1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \ldots$

$\pi^6/945 = 1/1^6 + 1/2^6 + 1/3^6 + 1/4^6 + \ldots$

.

.

.

$2^{24} * 76977927 * \pi^{26}/(1*2*3* \ldots *27) = 1/1^{26} + 1/2^{26} + 1/3^{26} + \ldots$

Le serie dei reciproci di potenza dispari a tutt'oggi non si sa se sono multipli razionali di potenze dispari di π.

Eulero trovò inoltre :

$\pi^2/12 = 1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + \ldots$

$\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \ldots$

$\pi^3/32 = 1/1^3 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + \ldots$

Sempre Eulero trovò due espresioni di frazioni continue per π.

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1.3}{4 + \cfrac{3.5}{4 + \cfrac{5.7}{4 + \cfrac{7.9}{4 + \ldots}}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{7 + \cfrac{1.3}{8 + \cfrac{3.5}{8 + \cfrac{5.7}{8 + \cfrac{7.9}{8 + \dots\dots\dots\dots}}}}}$$

Sempre dovuta ad Eulero è la formula

$e^{i\pi} + 1 = 0$. Questa è da molti definita come l'equazione più bella di tutta la matematica e lega il numero di nepero, pi greco e l'unità immaginaria con i due più importanti numeri interi, 0 e 1.

Newton dallo sviluppo in serie dell'arcoseno ottiene per x=1 la seguente serie:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2*3} + \frac{1*3}{2*4*5} + \frac{1*3*5}{2*4*6*7} + \frac{1*3*5*7}{2*4*6*8*9} + \dots\dots$$

Sempre di Newton è la serie:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3*2^3}\right) + \frac{1*3}{2*4}\left(\frac{1}{5*2^5}\right) + \frac{1*3*5}{2*4*6}\left(\frac{1}{7*2^7}\right) + \dots\dots$$

La serie di Newton sono lentamente convergenti e si prestano male al calcolo approssimato di π.

Abraham Sharp (1651-1742) sviluppando l'arcotangente di $\sqrt{\frac{1}{3}}$, ossia la tangente di 30°, trova la seguente serie:

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} * [1 - (\frac{1}{3*3}) + (\frac{1}{3^2*5}) - (\frac{1}{3^3*7}) + \dots\dots\dots]$$

Svariate serie sono state trovate anche dalla formula

$\frac{\pi}{4} = arctg(1/2) + arctg(1/3)$ (angoli in radianti)

Serie per così dira più veloci furono trovate da Eulero e J. Machin(1680-1751) sfruttando particolari identità :

$\frac{\pi}{4} = 5arctg1/7 + 2arctg3/79$ Eulero

$\frac{\pi}{4} = 2arctg1/3 + artg1/7$

$\frac{\pi}{4} = 4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239}$ J. Machin

Dato che la serie dell'arcotangente per un dato valore converge tanto più rapidamente quanto più piccolo è il valore stesso, la formula di Machin è molto efficiente per i calcoli.
In pratica dall'inizio del XVIII secolo ai primi anni settanta tutti i calcoli di π si sono basati su varianti della formula di Machin.

Abraham De Moivre (1667-1754) e P.S. de Laplace (1749-1827) mostrano che:
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ e con essa si ha l'ingresso trionfale di π nella teoria delle probabilità.

Johann Heirich Lambert (1728-1777) nel 1761 dimostra che π è un numero irrazionale.
Questa dimostrazione non eliminava la questione della quadratura del cerchio in quanto sono costruibili espressioni irrazionali di secondo grado con riga e compasso.
La questione fu definita nel 1882 da Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852-1939) dimostrando che π oltre ad essere irrazionale era anche trascendente ed era quindi impossibile quadrare il cerchio con solo riga e compasso in un numero finito di passi.
Anche di fronte all'impossibilità di quadrare il cerchio i cacciatori di cifre non si sono fermati stabilendo di anno in anno sempre dei nuovi record.
La storia di π ci permette anche di parlare di uno dei più importanti matematici del XX secolo: Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920).
Ramanujan subì fortemente il fascino di π ed aprì porte nuove per calcolarlo adoperando equazioni modulari. Queste sono equazioni iterative: permettono cioè di reintrodurre nella formula i risultati del calcolo precedente per avere una approssimazione a π ancora migliore.
Un'equazione modulare è una relazione algebrica tra una funzione f(x), espressa in termini della variabile x e la stessa funzione espressa in termini di una potenza intera di x , per esempio $f(x^2)$, $f(x^3)$ ……
L'ordine dell'equazione modulare è dato dalla potenza intera.

Per questo tipo di funzioni valgono particolari proprietà di simmetria e particolari condizioni portano a cosiddetti valori singolari che coincidono con π fino ad un numero sorprendente di posti decimali.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 * 396^{4n}}$$ Ramanujan (1914)

con n! = n * (n-1) * (n-2) * ……* 1 e 0! = 1.

Sempre ricercando soluzioni singolari di funzioni modulari Jonathan M. Borwein e Peter B. Borwein (contemporanei) hanno trovato nel 1987 la seguente serie:

$$\frac{1}{\pi} = 12 * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(n)!^3 (3n)![5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^{(3n+3/2)}} *$$
$$*[212175710912\sqrt{61} + 1657145277365 +$$
$$+ n(13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750)]$$

(Il primo termine per n=0 porta ad un numero che concorda con π per 24 cifre.

I fratelli Chudnovsky Gregory e David (contemporanei) hanno trovato:

$$\frac{1}{\pi} = 12 * \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n * \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n!)} * \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{3n+3/2}}$$

A tutt'oggi sono ancora aperte le ricerche per approssimare π con valori singolari di funzioni modulari.